ZUR AXIOMATISCHEN CHARAKTERISIERUNG DES STEINERPUNKTES KONVEXER KÖRPER

VON
H. HADWIGER

ABSTRACT

It is shown that the Steiner point is the only point that can be associated additively, homothety-equivariantly and continuously with any convex body in Euclidean space E^n.

1. In diesem ersten Abschnitt erklären wir die notwendigsten Begriffe und formulieren das Hauptresultat der vorliegenden Note. Es bezeichne $\mathfrak{C}^n$ die Klasse der (nichtleeren, m-dimensionalen, $0 \leqq m \leqq n$) kompakten konvexen Punktmengen (Eikörper) $A \subset E^n$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes E^n $(n \geqq 1)$. Ein Punkt $z \in E^n$ sei als Ursprung ausgezeichnet und weitere Raumpunkte sollen gleich bezeichnet werden, wie ihre Ortsvektoren bezüglich z. Weiter bedeute H^n die Gruppe der (nichtsingulären) Homothetien des E^n auf sich im erweiterten Sinne; H^n enthält dann die Untergruppe T^n der Translationen $\tau: x \to x + t$, sowie die Untergruppe D^n der (nichtsingulären) Dilatationen $\lambda: x \to \lambda x$; $\lambda \in R^+$ und endlich die Spiegelung am Ursprung z $\sigma: x \to -x$.

Die allgemeinste Homothetie $\gamma \in H^n$ lässt sich dann in der Form $\gamma = \pm\lambda\tau$ darstellen. Es sei nun $f: \mathfrak{C}^n \to E^n$ eine (eindeutige) Abbildung der Eikörperklasse $\mathfrak{C}^n$ in der Raum E^n, sodass jedem Körper $A \in \mathfrak{C}^n$ ein Raumpunkt $f(A) \in E^n$ zugewiesen wird. Nachfolgend erörtern wir drei Eigenschaften einer derartigen Zuordnung f, die im Rahmen dieser Arbeit zentrale Bedeutung haben. Wir nennen f additiv, wenn die Forderung

1.1 $$A, B,\ A \cup B \in \mathfrak{C}^n \Rightarrow f(A) + f(B) = f(A \cup B) + f(A \cap B)$$

erfüllt wird; ferner heisst f homothetieaequivariant, wenn

1.2 $$A \in \mathfrak{C}^n,\ \gamma \in H^n \Rightarrow f(\gamma A) = \gamma f(A)$$

gilt. Schliesslich soll f stetig genannt werden, wenn

Received January 24, 1969.
Additions received May 8, 1969

1.3 $$A,\ A_i \in \mathfrak{C}^n (i = 1, 2, \cdots),\ A_i \to A\,(i \to \infty) \Rightarrow f(A_i) \to f(A)\,(i \to \infty)$$

zutrifft; der verwendete Konvergenzbegriff stützt sich auf die übliche Metrik im Raum der Eikörper (vgl. [1], 4.3.1, S. 151).

Es ist nun bekannt, dass die Abbildung s, die einem Eikörper A den Steinerpunkt $s(A)$ zuweist, diese drei Eigenschaften besitzt. Hierüber kann man sich bei B. Grünbaum [2] (14.4, S. 312) kurz orientieren. Unsere Ausführungen bleiben aber zunächst unabhängig von der bestehenden Theorie des gennanten Punktes. Das in Aussicht gestellte Hauptergebnis dieser Note kann wie folgt formuliert werden:

SATZ. *Es gibt eine und nur eine additive, homothetieaequivariante und stetige Abbildung der Eikörperklasse $\mathfrak{C}^n$ in den Raum E^n, nämlich die, welche jedem Eikörper seinen Steinerpunkt zuweist.*

Durch die drei Forderungen 1.1 bis 1.3 ist also dieser ausgezeichnete Punkt auf axiomatische Weise charakterisiert.

Eine andere Kennzeichnung ist bereits bakannt, indem G. C. Shephard [3] zunächst für $n = 2$ und sodann K. A. Schmitt [6] für $n \geqq 2$ nachgewiesen haben, dass $s(A)$ der einzige Punkt ist, der jedem konvexen Körper $A \in \mathfrak{C}^n$ so zugeordnet werden kann, dass die Abbildung im Minkowskischen Sinn additiv, bezüglich der Gruppe der kongruenten Abbildungen im E^n aequivariant und schliesslich stetig ist. Die hier im Spiel stehende Additivität von f ist durch

1.4 $$A, B \in \mathfrak{C}^n \Rightarrow f(A + B) = f(A) + f(B)$$

gegeben, wobei die Verknüpfung + die Addition in Minkowskischen Sinn bedeutet. Weitere bemerkenswerte additive Eigenschaften (Additionstheoreme vom Eulerschen Typ) sind von G. C. Shephard [5] kürzlich begründet worden, welche die ausgezeichnete Bedeutung des Steinerpunktes $s(A)$ ins rechte Licht zu rücken vermögen.

Die unserem Satz zugrunde gelegte additive Eigensschaft 1.1 scheint eine an sich stärkere Forderung an die Zuordnung f zu stellen, als 1.4, womit auch der Umstand zusammenhängen mag, dass unsere Charakterisierung möglich ist, ohne eine Kovarianz mit Drehungen vorauszusetzen.

Die nachfolgenden beiden Abschnitte handeln von zwei Hilfssätzen, die wir beim Hauptbeweis heranziehen werden, die aber auch im Hinblick auf andere Verwendungsmöglichkeiten von Interesse sein dürften. In den weiteren zwei Abschnitten folgen dann die Beweise der Einzigkeit und der Existenz und damit die Begründung unseres Satzes. Diese lassen übrigens erkennen, dass bei Beschränkung auf die Teilklasse $\mathfrak{K}^n \subset \mathfrak{C}^n$ der konvexen Polytope die analog lautende axiomatische Kennzeichnung des Steinerpunktes auch ohne Stetigkeitsvoraussetzung möglich ist.

Der induktiv geführte Existenzbeweis liefert sodann eine für den Steinerpunkt $s(A)$ eines Eikörpers $A \in \mathfrak{C}^n$ gültige Integralgleichung, wonach

1.5 $$s(A) = \frac{1}{n\omega_n} \int s(A_u) du$$

gilt. Hierbei bezeichnet A_u den Normalriss von A in die Stützebene von A der Richtung (Einheitsvektor) u, du die Richtungsdichte und

1.6 $$n\omega_n = \int du$$

stellt den Flächeninhalt der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre S (Richtungssphäre) dar; die vorgesehenen Integrationen erstrecken sich über alle Richtungen u des Raumes. Der Steinerpunkt ist also das Integralmittel der Steinerpunkte der Normalrisse des Eikörpers in seinen Stützebenen.

Mit unserer Kennzeichnung des Steinerpunktes durch die drei Eigenschaften 1.1 bis 1.3 lässt sich ferner eine Variante zur Integraldarstellung 1.5 leicht begründen, nämlich

1.7 $$s(A) = \frac{1}{n\omega_n} \int [s(A)]_u du,$$

wo nun $[s(A)]_u$ den Normalriss des Steinerpunktes $s(A)$ in die Stützebene von A der Richtung u anzeigt. Der Steinerpunkt ist also das Integralmittel seiner Normalrisse in die Stützebenen des Eikörpers. Die Formel 1.7 ist im wesentlichen identisch mit der von G. C. Shephard [4] aufgestellten Integraldarstellung

1.8 $$s(A) = \frac{1}{\omega_n} \int h(A,u) u du,$$

wo $h(A,u)$ die Stützfunktion des Eikörpers A bezogen auf den Ursprung z bedeutet. Ist w eine feste Richtung, so ist

1.9 $$\omega_n = \int \langle u, w \rangle^2 \, du$$

das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel, wobei $\langle u,w \rangle$ das skalare Produkt darstellt. Die Ueberführung von 1.7 in 1.8 durch Veränderung des

Bezugspunktes liegt auf der Hand. Schliesslich soll eine weitere interessante Folgerung, die B. Grünbaum [7] gefunden und dem Verfasser mitgeteilt hat, vorgebracht werden. Es sei $1 \leqq i \leqq n-1$ und E^i und $\tilde{E}^{n-i}$ sollen zwei durch den Ursprung z hindurchlaufende komplementäre, aufeinander totalorthogonal stehende Unterräume des E^n der Dimensionen i und $n-i$ bezeichnen. Sind A_i und $\tilde{A}_{n-i}$ die Normalrisse eines Eikörpers $A \in \mathfrak{C}^n$ in den Unterräumen E^i und $\tilde{E}^{n-i}$, so gilt die Integralformel

1.10 $$s(A) = C_i \int [s(A_i) + s(\tilde{A}_{n-i})] d\overline{\overline{E}}^i,$$

wobei $d\overline{\overline{E}}^i$ die Drehdichte des E^i um z im Sinne der Integralgeometrie (vgl. [1], 6.2.1, S.227) anzeigt, und die Konstante C_i durch die Normierungsbedingung

1.11 $$1/C_i = \binom{n}{i} \frac{\omega_n \cdots \omega_{n-i+1}}{\omega_1 \cdots \omega_i} = \int d\overline{\overline{E}}^i$$

gegeben ist. In der Tat ist mit der rechten Seite von 1.10 eine Abbildung von $\mathfrak{C}^n$ in E^n definiert, welche die drei in unserem Satz verlangten Eigenschaften aufweist, sodass also $s(A)$ dargestellt wird. Als Korollar der Grünbaumschen Formel 1.10 lässt sich mit einigen Umrechnungen auch unsere Beziehung 1.5 gewinnen, die mit dem Spezialfall $i = 1$ bzw. $i = n-1$ gleichwertig ist.

2. Es sei ϕ: $\mathfrak{K}^n \to R$ eine reellwertige über $\mathfrak{K}^n$ definierte Funktion. Diese nennen wir einfach-additiv, wenn die Aussage

2.1 $$P, Q, P \cup Q \in \mathfrak{K}^n, \ \dim(P \cap Q) \leqq n-1 \Rightarrow \phi(P) + \phi(Q) = \phi(P \cup Q)$$

gilt. Ferner soll ϕ translationsinvariant, wenn

2.2 $$P \in \mathfrak{K}^n, \ \tau \in T^n \Rightarrow \phi(\tau P) = \phi(P),$$

und linear-homogen (homogen vom Grade 1) gennant werden, wenn

2.3 $$P \in \mathfrak{K}^n, \ \lambda \in R^+ \Rightarrow \phi(\lambda P) = \lambda \phi(P)$$

gilt. Schliesslich heisse ϕ antisymmetrisch, wenn

2.4 $$P \in \mathfrak{K}^n \Rightarrow \phi(\sigma P) = -\phi(P)$$

zutrifft; σ bezeichnet die Spiegelung am Ursprung z. Es gilt nun

LEMMA 1. *Eine über der Klasse $\mathfrak{K}^n$ der Eipolytope des E^n definierte reellwertige, einfach-additive, translationsinvariante linear-homogene und antisymmetrische Funktion verschwindet identisch.*

Beweis. Ist $n=1$, $P \subset E^1$ eine abgeschlossene Strecke, so ist P mit σP translationsgleich, sodass mit 2.2 und 2.4 unmittelbar $\phi(P)=0$ folgt. Es sei nun $n \geqq 2$ und Lemma 1 sei für alle Dimensionen $< n$ bereits bewiesen. Nach einem bekannten Sachverhalt (vgl. [1], 2.3.3, S.80) lässt sich ϕ unter Bewahrung der vier Eigenschaften 2.1 bis 2.4 auf die $\mathfrak{K}^n$ umfassende Klasse $\mathfrak{P}^n$ der Polyeder des E^n erweitern. Mit 2.1 und 2.2 folgt

2.5 $$P, Q \in \mathfrak{P}^n,\ P \approx Q \Rightarrow \phi(P) = \phi(Q),$$

wo das Aequivalenzzeichen $\approx$ die translative Zerlegungsgleichheit im Sinne der Elementargeometrie anzeigt. Ist nun $\mathfrak{Z}^n \subset \mathfrak{P}^n$ die Teiklasse der echten Zylinderpolyeder des E^n (vgl. [1], 1.3.5, S.28), so so folgt mit einem Hilfssatz über zylindrische Zerlegungskongruenzen (vgl. [1], 2.2.4, S.55) die Aussage

2.6 $$P \in \mathfrak{Z}^n \Rightarrow \phi(P) = 0,$$

und damit weiter

2.7 $$P, Q \in \mathfrak{P}^n,\ P \approx Q (\mathrm{mod}\, \mathfrak{Z}^n) \Rightarrow \phi(P) = \phi(Q).$$

Es bezeichne nun G eine feste durch z hindurchgehende $(n-1)$-dimensionale Grundebene im E^n mit der Normalen (Einheitsvektor) w und ferner u einen weiteren Einheitsvektor, welcher der sich auf das Skalarprodukt mit w beziehenden Bedingung $0 < \langle u, w \rangle < 1$ genügt. Ist nun $P' \subset G$ ein Polyeder der Klasse $\mathfrak{P}^{n-1}$ in der Grundebene, so lässt sich ein $\mu \in R^+$ so wählen, dass für alle $p' \in P'$ die Einschränkung $\langle u, p' \rangle \leqq \mu$ erfüllt wird. Mit dem Ansatz

$$P = [P', u] = \{x \in E^n;\ x = p' + \lambda w,\ 0 \leqq \lambda \leqq [\mu - \langle u, p' \rangle]/\langle u, w \rangle, p' \in P'\}$$

wird ein über P' auf G stehendes "schief abgeschnittenes" Säulenpolyeder gegeben. Wegen 2.7 hat nun $\phi([P', u])$ für alle zulässigen μ denselben Wert, sodass bei festem u durch $\psi_u(P') = \phi([P', u])$ eine reellwertige Funktion über der Klasse $\mathfrak{P}^{n-1}$ der Polyeder in der Grundebene G definiert wird. Wie sich leicht überprüfen lässt, erfüllt ψ_u bezogen auf den $(n-1)$-dimensionalen Raum G erneut die mit 2.1 bis 2.4 ausgedrückten Forderungen. Nach Induktionsvoraussetzung folgt demnach $\psi_u(P') = 0$ oder also $\phi([P', u]) = 0$. Ist $\mathfrak{S}^n$ die Klasse aller Polyeder von $\mathfrak{P}^n$, die sich bei fester Grundebene G in endlich viele Säulenpolyeder der Art $[P', u]$ mit beliebigen $P' \subset G$ und verschiedenen zulässigen u im Sinne der Elementargeometrie zerlegen lassen, so existieren zu einem Polyeder $P \subset E^n$ zwei passende Polyeder P_0, $P_{00} \in \mathfrak{S}^n$ solcher Art, dass die Zerlegungskongruenz $P \cup P_0 \approx P_{00}$

(mod$\mathfrak{Z}^n$) mit $P \cap P_0 = \varnothing$ besteht. Mit der Bemerkung, dass $\phi(P_0) = \phi(P_{00}) = 0$ sein muss, folgert man mit Rückblick auf 2.7, dass $\phi(P) = 0$ ausfällt. Damit ist der Beweis beendet.

3. Nun sei $\mathfrak{V}^n$ der n-dimensionale Vektorraum des E^n und g: $\mathfrak{R}^n \to \mathfrak{V}^n$ eine Abbildung der Eipolytopklasse $\mathfrak{R}^n$ in $\mathfrak{V}^n$, sodass jedem $P \in \mathfrak{R}^n$ ein Vektor gP zugeordnet ist. Wenn $gP = 0$ (Nullvektor) für alle P ist, so wollen wir g trivial nennen. Weiter heisse g einfach-additiv, wenn die Aussage

3.1 $$P, Q, P \cup Q \in \mathfrak{R}^n, \dim(P \cap Q) \leqq n-1 \Rightarrow gP + gQ = g(P \cup Q)$$

gilt. Weiter sei g translationsinvariant, wenn

3.2 $$P \in \mathfrak{R}^n,\ \tau \in T^n \Rightarrow g(\tau P) = gP$$

und dilatationsaequivariant, wenn die Aussage

3.3 $$P \in \mathfrak{R}^n,\ \lambda \in R^+ \Rightarrow g(\lambda P) = \lambda(gP)$$

gültig ist. Endlich wollen wir g antisymmetrisch nennen, wenn

3.4 $$P \in \mathfrak{R}^n \Rightarrow g(\sigma P) = -gP$$

feststeht, falls σ die Spiegelung am Ursprung z bedeutet. Es gilt nun

LEMMA II. *Eine einfach-additive, translationsinvariante, dilatationsaequivariante und antisymmetrische Abbildung der Klasse $\mathfrak{R}^n$ der Eipolytope des E^n in den n-dimensionalen euklidischen Vektorraum $\mathfrak{V}^n$ ist trivial.*

Beweis. Mit einem beliebig gewählten Einheitsvektor u des E^n setzen wir $\phi_u(P) = \langle gP, u \rangle$ und haben damit eine über $\mathfrak{R}^n$ definierte reellwertige Funktion gewonnen, die wie man mühelos verifizieren kann, einfach-additiv, translationsinvariant, linear-homogen und antisymmetrisch ist, also den Forderungen 2.1 bis 2.4 genügt. Nach Lemma I muss $\phi_u(P) = 0$ ausfallen, und da dies für alle u zutrifft, resultiert offenbar $gP = 0$, womit der Nachweis beendet ist.

4. Wir weisen nun nach, dass es höchstens eine Abbildung f: $\mathfrak{C}^n \to E^n$ geben kann, die den Forderungen 1.1. bis 1.3 genügt (Einzigkeitsbeweis). Es sei zunächst $n = 1$ und $A = [p, q] \subset E^1$ ein abgeschlossenes Intervall (Strecke). Wegen $A = \sigma A + p + q$ gilt mit 1.2 einerseits $f(A) = f(\sigma A) + p + q$ und ebenso andererseits $f(A) = -f(\sigma A)$, sodass $f(A) = (p + q)/2$ resultiert, also ein eindeutig durch A bestimmeter Punkt des E^1. Es sei jetzt $n \geqq 2$ und die Einzigkeit sei bereits für alle Dimensionen $< n$ gesichert. Sind nun f und f_0 zwei Abbildungen im E^n der betrachteten Art, so wird durch

4.1 $$gA = f(A) - f_0(A)$$

eine Abbildung von $\mathfrak{C}^n$ in den n-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{V}^n$ definiert. Ist g: $\mathfrak{K}^n \to \mathfrak{V}^n$ ihre Restriktion auf die Eipolyederklasse $\mathfrak{K}^n$, so weist man mit 1.1 für f und f_0 leicht nach, dass g die Forderung 3.1 erfüllt, also einfach-additiv ausfällt, da nach Induktionsvoraussetzung $f(P \cap Q) = f_0(P \cap Q)$ gelten muss, wenn $\dim(P \cap Q) \leqq n - 1$ ist, so dass $g(P \cap Q) = 0$ wird. Ferner ist g translationsinvariant, dilatationsaequivariant und antisymmetrisch, indem man das Zutreffen von 3.2 bis 3.4 direkt aus der Eigenschaft 1.2 für f und f_0 und Ansatz 4.1 ablesen kann. Mit Lemma II schliesst man auf $gP = 0$. Da nun jeder Eikörper $A \in \mathfrak{C}^n$ Limeskörper einer konvergenten Folge von Eipolyedern $A_i \in \mathfrak{K}^n$ $(i = 1, 2, \cdots)$ ist, schliesst man mit der Stetigkeitseigenschaft 1.3 von f und f_0, dass auch $gA = 0$ sein muss. Dies bedeutet, dass für alle $A \in \mathfrak{C}^n$ die Uebereinstimmung $f(A) = f_0(A)$ festgestellt ist, was zu zeigen war.

5. Nun weisen wir noch nach, dass es wenigstens eine Abbildung $f: \mathfrak{C}^n \to E^n$ mit den Eigenschaften 1.1 bis 1.3 gibt (Existenzbeweis). Sei zunächst $n = 1$ und $A = [p, q] \subset E^1$ wieder ein abgeschlossenes Intervall (Strecke). Mit $f(A) = (p + q)/2$ ist in der Tat eine Lösung gegeben, wie sich mit einfachsten Schlüssen überprüfen lässt. Es sei jetzt $n \geqq 2$ und wir nehmen an, dass die hier in Frage stehende Existenz bereits für alle Dimensionen $< n$ nachgewiesen sei. Ist G eine feste durch z gehende $(n - 1)$-dimensionale Grundebene im E^n, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Funktion g: $\mathfrak{C}^{n-1} \to G$, die bezogen auf G die Eigenschaften 1.1 bis 1.3 aufweist, wo $\mathfrak{C}^{n-1}$ die Klasse der Eikörper $A \subset G$ bezeichnet. Es sei nun ρ eine kongruente Abbildung von G auf sich, die z festlässt. Mit $A \subset \mathfrak{C}^{n-1}$ setzen wir $\tilde{g}(A) = \rho^{-1}g(\rho A)$ und stellen mühelos fest, dass $\tilde{g}$ wieder die Eigenschaften 1.1 und 1.3 in G besitzt. Ist $\gamma \in H^{n-1}$ eine Homothetie in G, so rechnet man mit $\rho\gamma = \gamma\rho$ leicht nach, dass $\tilde{g}(\gamma A) = \gamma\tilde{g}(A)$ gilt, sodass $\tilde{g}$ auch der Forderung 1.2 in G genügt. Nach der oben bewiesenen Einzigkeit lässt sich $\tilde{g}(A) = g(A)$ schliessen, womit nun $g(\rho A) = \rho g(A)$ gefolgert werden kann, also die Aequivarianz der Abbildung g bezüglich der Gruppe der (eigentlichen oder uneigentlichen) Drehungen in G um z. Nun lässt sich g für alle $(n - 1)$-dimensionalen Ebenen H im E^n sinngemäss erklären: Ist $A \subset H$ ein flacher Eikörper, so wird $g(A) = \sigma^{-1}g(\sigma A)$ gesetzt, wo σ irgend eine kongruente Abbildung im E^n mit $\sigma H = G$ bedeutet; wegen der oben sichergestellten Kovarianz ist $g(A) \in H$ von der individuellen Wahl von σ unabhänging. Weiter lässt sich nun die folgende Stetigkeitsaussage bestätigen: Ist $A_i \subset H_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ eine Folge flacher Eikörper und bestehlt im E^n die Konvergenz $A_i \to A\,(i \to \infty)$, so gilt $g(A_i) \to g(A)$ $(i \to \infty)$. Der genau durchgeführte Nachweis erfordert lediglich schulmässige Schlüsse. Nun sei $A \in \mathfrak{C}^n$ wieder ein beliebiger Eikörper und A_u bezeichne den Normalriss von A in die Stützebene $H(A,u)$ von A der Richtung u. Mit dem über alle Richtungen u, d.h. über die Richtungssphäre S im E^n erstreckten Integral

5.1 $$f(A) = \frac{1}{n\omega_n} \int g(A_u)du,$$

wo $n\omega_n$ den Flächeninhalt der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre S und du die Richtungsdichte bezeichnen, wird nun eine Abbildung $f: \mathfrak{C}^n \to E^n$ definiert, welche die Eigenschaften 1.1 bis 1.3 aufweist. Zunächst ist zu bemerken, dass sich die Normalrisse A_u mit variabler Richtung u stetig ändern, sodass mit der oben begründeten Stetigkeitseigenschaft von g die Existenz des Integrals in 5.1 gesichert ist. Mit der Kompaktheit von S folgt zugleich auch die Stetigkeit 1.3 für f. Es sei weiter G_u eine $(n-1)$-dimensionale Ebene im E^n durch z mit der Normalen u. Bedeutet $h(A,u)$ den Abstand der Ebene $H(A,u)$ von z (Stützgrösse von A in Richtung u), so ist $A_u = A_u^0 + h(A,u)u$, wobei A_u^0 den Normalriss von A in die Ebene G_u darstellt. Im Hinblick auf die für g in G_u nach Induktionsannahme gültige Additivität 1.1 resultier mit den Bemerkungen $(A \cup B)_u^0 = A_u^0 \cup B_u^0$, $(A \cap B)_u^0 = A_u^0 \cap B_u^0$ in Verbindung mit der additiven Formel $h(A \cup B, u) + h(A \cap B, u) = h(A,u) + h(B,u)$ leicht, dass auch f im E^n die Forderung 1.1 erfüllt. Sei weiter $\gamma: x \to \pm\lambda x + t$ eine Homothetie, so vermerken wir vorbereitend, dass $(\gamma A)_u^0 = \pm\lambda A_u^0 + t - \langle u,t\rangle u$, $h(\gamma A,u) = \lambda h(\pm A,u) + \langle u,t\rangle$ ausfällt, woraus man auf $(\gamma A)_u = = \lambda(\pm A)_u + t$ und mit Beanspruchung von 1.2 für g und Integration nach 5.1 die Homothetieaequivarianz $f(\gamma A) = \pm\lambda f(A) + t = \gamma f(A)$ gewinnt, wonach f auch die Forderung 1.2 erfüllt. Damit ist der Existenzbeweis beendet.

Bedenken wir, dass es nach der Einzigkeit andererseits nur eine Lösung f gibt, wir bezeichnen diese ausgezeichnete Lösung mit s, so resultiert mit 5.1 die Integralgleichung 1.5.

Mit analogen einfachsten Ueberlegungen, wie sie zum Nachweis der Eigenschaften 1.1 bis 1.3 der mit 5.1 dargestellten Funktion dienten, kann auch folgendes gezeigt werden: Ist f eine solche Funktion und bezeichnet $[f(A)]_u$ den Normalriss von $f(A)$ in die Stützebene $H(A,u)$ von A der Richtung u, so ist ebenfalls

5.2 $$\tilde{f}(A) = \frac{1}{n\omega_n} \int [f(A)]_u du$$

eine analoge Funktion mit den Eigenschaften 1.1 bis 1.3. Nach dem von uns bewiesenen Satz muss aber $\tilde{f} = f = s$ gelten, und es resultiert mit 5.2 die Integralformel 1.7 für den Steinerpunkt. Bedeutet wie oben $h(A, u)$ wieder die Stützfunktion von A bezüglich z, so lässt sich die Beziehung

$$[s(A)]_u = s(A) + [h(A, u) - \langle s(A), u \rangle]u$$

notieren und ihre Verwertung in 1.7 liefert

$$\int h(A, u)udu = \int \langle s(A), u \rangle udu.$$

Mit der für einen beliebigen Vektor t gültigen Formel

$$\int \langle t, u \rangle udu = \omega_n t$$

folgt letzten Endes die Shephardsche Integraldarstellung 1.8.

Literatur

1. H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberflache und Isoperimetrie;* Springer-Verlag, 1957.

2. B. Grünbaum, *Convex polytopes*, Wiley and Sons, 1967.

3. G. C. Shephard, *A uniqueness theorem for the Steiner point of a convex region*, J. London Math. Soc. **43** (1968), 439–444

4. G. C. Shephard, *Approximation problems for convex polyhedra*, Mathematika, **11** (1964), 9–18.

5. G. C. Shephard, *The Steiner point of a convex polytop*, Canad. J. Math. **18** (1966), 1294–1300.

6. K. A. Schmitt, *Kennzeichnung des Steinerpunktes konvexer Körper*, Math. Z. **105** (1968), 387–392.

7. B. Grünbaum, Briefliche Mitteilung vom 1. März 1969 an den Verfasser.

Universität Bern,
Mathematisches Institut,
Bern, Switzerland